不安定プラズマの輸送方程式

松平, 升; 西川, 恭治; 大阪, 文雄

不安定プラズマの輸送方程式

松平　　升（東大教養）
西川恭治
大阪文雄（東北大通研）

Part〔I〕　General Survey　　西川．松平

（3月23日受理）

§1　〔序〕

昨年夏の堅田の研究会（不安定性と非線形伝導現象）で、不安定プラズマの輸送方程式に対する諸理論の間の関係を明らかにすることが宿題として提出された。この論文はその宿題に対する我々の解答である。あまりoriginal　な所はないが、現存する諸理論に於けるいくつかの不明確な点を明らかにし、それらを一つの統一的な見方で整理することは大変教訓的であると思われるので、ここに筆を取り出した次第である。但し、果して整理した事になつたかどうかは読者の判断に任せる。

Part〔I〕では、まず一般的考察を行つて、問題の所在を明らかにする。

§2　〔問題提起〕

粒子間相関（衝突）を考えないLandau-Vlasov方程式[1]を考えよう。電子の分布関数のFourier 変換を $f_{\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}\,t)$ とし、イオンについては一様な分布を仮定して、次の式を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\underset{\sim}{k}\,\underset{\sim}{v}\right) f_{\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}\,t) = \frac{e}{m}\{ \underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{k}}(t)\cdot \nabla_{\underset{\sim}{v}}\, f_0(\underset{\sim}{v}\;t)$$

$$+\sum_{q \neq 0} \underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{k}-\underset{\sim}{q}}(t) \cdot \nabla_{\underset{\sim}{v}} \; f_{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{v}\; t) \} \tag{1}$$

$$i\underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{q}}(t) = -4\pi e n \int d\underset{\sim}{v} \{ f_{\underset{\sim}{q}}(\underset{\sim}{v}\; t) - \delta_{\underset{\sim}{q},0} f_0(\underset{\sim}{v}\; t) \} \tag{2}$$

ここに、$\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{q}}(t)$ はPoisson 方程式(2)できまるself-consistant field, m, −e及び n は夫々電子の質量、電荷及び密度である。この方程式は、複素誘電率

$$\epsilon^{+}_{\underset{\sim}{q}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{q^2} \int d\underset{\sim}{v} \; \frac{\underset{\sim}{q} \cdot \nabla_{\underset{\sim}{v}} \; f_0(\underset{\sim}{v}\; t)}{\underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{v} - \omega} \tag{3}$$

$$(\; \omega \in S_{+} \; = \text{上半平面} \;)$$

が、上半平面に零点をもつ時、$f_{\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}\; t)$ に対して、時間と共に成長する解を持つ。但し、ω_p はプラズマ振動数である。実際にこのような解が現われるのは $f_0(\underset{\sim}{v}\; t)$ が極小をもつ時、[2] 従つて二つの極大をもつときに限られ、その形や二つの極大の間の距離（drift velocity)(によつて、不安定性の起る条件も異なつてくるが、[3] ここではそれについての議論は省略する。

さて、(1)に対して通常やるように線形近似（$\underset{\sim}{q} \neq 0$ の項を無視し、$f_0(\underset{\sim}{v}\; t)$ の時間依存性を考えない。）を行うと、この成長する解は際限なく成長しつづける。勿論実際にはこのような事は起りえず、どこかで成長が抑制される殆である。理論的に興味があるのは、この成長を途中で抑制するメカニズムが何であるか、そして抑制された後の状態はどういう性質をもつか、という点にある。これに関連して、そのような不安定成長に伴う異常性が輸送係数等を通してどう観測されるかという問題もあるが、我々の研究はまだまだそこまで至つていない。この点は今後の問題として残しておきたい。

§ 3 〔 Vlasov 方程式による理論 〕

さて、不安定成長を抑制するメカニズムは、実は(1)式の非線型項の中にもある。最も簡単には、線形近似で、$f_{\underset{\sim}{k}}(\underset{\sim}{v}\,t)$ を求めておいて、後にその成長率が $f_0(\underset{\sim}{v}\,t)$ を通してゆつくり時間と共に変化するとするのである。（準線形理論[3]）。二つの理論によると、自己無撞着電場のエネルギー $|\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{q}}(t)|^2$ 並びに $f_0(\underset{\sim}{v}\,t)$ は次の方程式に従う事が示される。

$$\frac{\partial}{\partial t}|\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{q}}(t)|^2 = 2\gamma_{\underset{\sim}{q}}(t)\,|\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{q}}(t)|^2 \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0(\underset{\sim}{v}\,t) = \nabla_{\underset{\sim}{v}}\,\underset{\approx}{D}(\underset{\sim}{v})\cdot\nabla_{\underset{\sim}{v}}\,f_0(\underset{\sim}{v}\,t) \tag{5}$$

ここに $\gamma_{\underset{\sim}{q}}(t)$ は $\varepsilon^{+}_{\underset{\sim}{q}}(\omega)=0$ の解の虚数部分として求まり、電場の成長率を表わす。

$$\gamma_{\underset{\sim}{q}}(t) = \frac{2\pi^2 e^2}{m}\,\frac{\omega_q}{q^2}\int d\underset{\sim}{v}\;\underset{\sim}{q}\cdot\nabla_{\underset{\sim}{v}}\,f_0(\underset{\sim}{v}\,t)\,\delta[\omega_q - q.\underset{\sim}{v}] \tag{6}$$

ω_q は $\varepsilon^{+}_{q}(\omega)=0$ のエネルギーを表わす。(5)式は $f_0(\underset{\sim}{v}\,t)$ が拡散方程式に従う事を表わし、その拡散係数 $\underset{\approx}{D}(\underset{\sim}{v})$ は電場のエネルギーに比例し、近似的に次式で与えられる。

$$\underset{\approx}{D}(\underset{\sim}{v}) = \sum_{\underset{\sim}{q}\neq 0}\frac{8\pi^2 e^2}{m^2 q^2}\;\underset{\sim}{q}\,\underset{\sim}{q}\;\delta[\omega_q - \underset{\sim}{q}\cdot\underset{\sim}{v}]\,|\underset{\sim}{E}_{\underset{\sim}{q}}(t)|^2 \tag{7}$$

これらの方程式に基づく安定化のメカニズムは次の通りである。仮に最初 $f_0(\underset{\sim}{v}\,t)$ は二つの山をもつていたことにしよう。一方は $\underset{\sim}{v}=0$ に於ける大きな山で、他方は drift velocity $\underset{\sim}{v}\,d$ の小さな山とする。すると、高速粒子からのエネルギーの供給によつて $\omega_q \approx \underset{\sim}{q}\cdot\underset{\sim}{v_d}$ というエネルギーをもつ密度波が不安定成長を行う。しかしこれに伴う電場のエネルギーの増加によつて(7)で与

えられる拡散係数が増大し、その結果 $f_0(\underset{\sim}{v}\,t)$ の $\underset{\sim}{vd}$ 附近の山は次第に広がり、平になつて行く。かくして電場の成長に寄与した粒子の数は減少し、ついに成長は止まつてしまうというのである。成長が止つた定常状態に於ては、$f_0(\underset{\sim}{v}\,t)$ の $\underset{\sim}{vd}$ 附近の山と谷は平になり、一方電場のエネルギーは、その平になつた部分の速度と同じ位相速度をもつものだけが有限の値として残る。後者は巨大な密度揺動として輸送係数等の観測にかかる事が期待されている。[5]

さて、二つの準線形理論によつて、不安定プラズマの安定化のメカニズムは大体説明されたように思われるが、実はこの理論には次のような本質的な欠点が存在する。

(a) この理論では、安定化した後 $f_0(\underset{\sim}{v}\,t)$ が定常分布に止まつたまま変化しなくなつてしまう。これは衝突を考えない Landau-Vlasov 方程式の致命的な欠点である。

(b) この理論では、成長する電場の存在が不可欠である。従つて(2)式から分かるように、空間的に均一な系には適用できない。後に示すように、この時には粒子間相関の不安定成長が本質的役割を果し、従つて衝突項を考えることが不可欠である。

(c) 不均一系の場合にも、粒子間相関は時間的成長を行うので、この場合といえども衝突項が不安定成長に二義的役割しか果さないかどうか、甚だ疑問である。特に、安定プラズマに於ては、$\underset{\sim}{q}\to 0$ の極限で collision damping の方が Landau damping より大きかつた事を想い出しておこう。

以上の欠点は、いずれも衝突項の無視に起因している。従つて問題は、不安定プラズマに於て衝突項がどういう役割を演ずるかを調べることに集約される。尤も、この他に(2)式で無視した mode 間 coupling の項があるが、こ

れはいわゆる random phase 近似の範囲外の項であり、それよりも、random phase 近似の範囲内で衝突項の影響を調べる事の方が先決であると思われる。我々の考察も、この点にしぼつて進める事にする。そのため、以下では、衝突項が最も簡単な形できいて来る均一系の場合に話を限る事にしよよ。

§ 4 〔安定プラズマに於ける衝突項〕

衝突項を random phase 近似の範囲内で求める問題は、安定系の場合には確立されている[6)7)]ので、まずその結果の考察から始めよう。

まず random phase 近似の内容について復習する。平衡状態での Free energy を求める問題に於いて、相互作用が弱く濃度の低い時、即ち、

$$e^2/(\lambda_D \kappa T) \ll 1, \qquad n\lambda_D^3 \gg 1 \tag{8}$$

$$e^2(n\lambda_D^3)/(\lambda_D \kappa T) \sim \text{有限}$$

という場合に random phase 近似がよい近似となつていることはよく知られている通りである。ここに λ_D は Debye length で、κ は Boltzmann 常数、T は温度である。非平衡系に於ては、遷移確率を求めるのに同様の近似が使える。但し、κT は粒子の平均の運動エネルギーで、又 λ_D は相互作用の effetive range r_0 で夫々おきかえねばならない。

さて、我々が興味あるのは、速度分布関数の緩和過程であり、従つて考える time scale も速度分布関数の緩和時間 τ_1 の程度の時間である。後者は大体

$$\tau_1 \sim (n r_0^3)/\omega_p \gg \omega_p^{-1} \tag{9}$$

の大きさである。これに対し、二体以上の相関関数は、安定プラズマに於ては、通常ω_p程度の振動数で振動しつつ、その振巾はτ_1よりずつと短い時間の中に定常値に近づいてしまう。その結果、$t \sim \tau_1$という time scale で考えるときには、系の状態変化は速度分布関数を通してのみ起ると考えてさし支えない。(Bogoliubov の kinetic stage の仮定)[7]。この点が安定プラズマに於ける衝突項の第一の特徴である。

安定プラズマの第二の特徴は、N体の速度分布関数がMarkoff process に従う点である。実際、初期時間に於ける粒子間相関は急速に忘れさられてしまうので、N体の速度分布関数は$t \sim \tau_1$の程度の時間の後には、それ自身で閉じたSmolukowski 方程式(Master equation)を満たすようになる。[6] その結果これを一体に reduce した式(これをBalescu-Lenard の式と呼ぶ)も、時刻tに於ける速度分布関数の値のみに依存する形となる。

第三に、Balescu-Lenard の式は通常の保存則をみたし、その解は Maxwell 分布に単調に接近する。(H定理)事が示される。[7]

以上三つの点が、安定プラズマに対する輸送方程式の特徴であり、この点に関してはBalescu-Lenard の式は通常の気体に対するBoltzmann 方程式と本質的に変る所がない。両者の違いは、Balescu-Lenard の式が多体衝突効果をとり入れてあるという点だけであり、その結果は、方程式の形を複雑にこそするが、上に述べた三つの基本的性質には何ら変更を与えない。

それでは、これらの事情は、不安定プラズマはどうであろうか。

§5 〔不安定プラズマに於ける衝突項〕

まず第一に、不安定プラズマの特徴を考えてみよう。不安定プラズマでは前に述べたように、粒子間相関の時間的成長によつて特徴づけられる。この

事は不安定プラズマの輸送理論をたてる場合には、time scaleとして粒子間相関の成長を特徴づける時間 τ_2 の過程の時間を考えるべき事を示している。この τ_2 は(6)で定義される $r_q(t)$ の逆数の程度の時間であるが、面倒な事に、後者は時間と共に変化し、不安定性が安定化していくにつれて減少していく。通常、不安定成長が急速に進んでいる間は $r_q(t)$ の時間依存性は無視してよいが、充分成長が進んで定常状態に近づいた後では、$r_q(t)$の時間依存性を考える事が本質的になる。

以上の点を頭において、§ 4 で述べた事柄が不安定系ではどうなるかを調べてみよう。

まず、粒子間相関が成長する系では、random phase 近似が再考を要する事は明らかである。しかしながら、random phase 近似の範囲内でも対相関関数の時間成長はとり入れる事ができる。又、三体以上の相関を取り入れたとしても、対相関だけを取り入れた時に、定性的に異なる結果がえられるとは思われない。従つて、ここでは一応random phase 近似はよいものとして話を進めよう。

次に、§ 4 で述べた安定系の三つの性質について考えてみよう。すぐ分るように、第一の性質、即ちBogoliubov の kinetic stageの仮定は不安定系では使えない。実際、対相関関数の独自の時間的成長が問題なのであつて、これは速度分布関数を通してでは表わせないものである。同様に第二の性質、即ち速度分布関数に対するMarkoff 仮定も正しくない。実際、$r_q(t) \ll \omega_p$では、安定化に要する時間 τ_3 *) は速度分布関数の緩和時間

---

*)〔脚註〕これは $r_q(t)$ が零になるに要する時間である。

τ_1 *) よりはるかに小さいと思われるので、一見速度分布関数の時間変化は対相関のそれとはcoupleしないように見えるが、まず $\tau_2 \ll \tau_3$ では、対相関関数の時間的成長が重要なため、その初期値の寄与が無視しえず、又、$\tau_2 \sim \tau_3$ では、成程対相関関数はある定常値に近づいているのでその初期値にはよらぬかもしれぬが、今度は $r_q(t)(f(vt)$ を通して変化する。）の時間依存性が重要になるので、対相関関数を考えるのに、速度分布関数を一定とみなすことができなくなる。かくして速度分布関数だけについてのMarkoff仮定は使えなくなる。

最後に第三の性質、即ちMaxwell分布への単調接近も最早正しくないことは自明である。しかし、これに関連して興味ある事は、速度分布関数に対するMaxwell 分布の代りに、対相関関数がある定常分布に単調接近を示さないかという事である。これは例えば準線形理論では確かにそうなつている。もしそうだとすると、その定常分布は何を表わすかという問題になる。これに対する一つの解答が後にのべるPines-Schrieffer-Ichimaru の理論[8),12)]で示されている。それによると、定常状態は一種の臨界揺動の状態を表わしている事になる。更に又、速度分布関数はその附近でどういう形をしているのであろうか。勿論 $t \gtrsim \tau_1$ とすればMaxwell分布に接近してしまうであろうが、その前の段階で何かある定常分布の如きものになりはしないか。この問題は上の臨界揺動の問題と関連して興味ある問題である。

---

*)〔脚註〕不安定系では速度分布関数の緩和過程は、個別粒子間の相互作用による過程（$\tau_1 \sim nr_0^3/\omega_p$）と、plasmons の不安定励起による過程の重ね合わせとなるため、単純に一つの緩和時間 τ_1 で指定できるかどうか疑問だがいずれにせよ、少くともいわゆる臨界点の近所では、$\tau_1 \gg \tau_3$ としてよいと思われる[9)]。

§６　〔現存するプラズマの輸送理論〕

現在次の三つの理論（衝突項を考えたものだけ）が存在する。

(a)　Pines−Schrieffer の理論[8)]

(b)　Rutherford−Frieman の理論[10)]

(c)　Balescu の理論[11)]

これらの理論は、そのままの形では一見互いに全く異つた結果を与えており そのため多分に混乱を招いているのではないかと思われる。又、数学的には最も完全に近いと思われるBalescu の理論に於ては、その理論的イメージが不明確であるばかりでなく、最後の結果も極めて見通し の悪い形をしている。その結果殆んど実用にならないのではないかとさえ考えられている。我々がこの論文を書き始めた主な動機は、最初に述べたように、このよな諸理論の間の混乱を解消し、同時に物理的 image をはつきりさせて、見通しのよい形に最後の結果をまとめることにある。このような観点から、この論文のPart II〜V ではこれらの三つの理論の詳細な分析とその補正を行い、且つそれらの間の関係を明らかにし、均一な不安定プラズマの輸送方程式に対する一つのまとまつた解答を出す事を試みる。ここでは簡単にこれらの理論の特徴をのべるにとどめよう。

(a)　Pines−Schrieffer の理論。この理論ではプラズマ裡の荷電粒子群と見る代りに、衣を着た個別粒子（dressed particles）との集団運動（plasmons）の集合と考え、それらの間の弱い相互作用を通して系の状態が変化すると考える。この理論は、第一にその描象がはつきりしている事、第二に直観的で計算が容易である事、第三に出発点が量子論にあるので、他の問題、例えば固体内電子の輸送理論に同じ idea が直ち適用できる点等々で、大変魅力的である。実際、現在までの所、モデルを使つて多

少とも立ち入つて調べられているのは、この理論が唯一である。この理論の欠陥は、例えばrandom phase 近似の他に二次摂動論を使つている点等、近似のconsistency が不明確な点で、この点基礎づけを必要とする。この論文のPart II では、まずこれらの点についての考察を行う。

(b) Rutherford–Frieman の理論。ここではbare particles が扱かわれている。出発点はB－B－G－K－Y方程式で、これをrandom phase 近似並びに$\tau_2 \ll \tau_3$という条件の下でとく。彼等はこれによつて準線形理論と似た式を導いているが、彼等の計算では、途中、時間と共に振動しながら増巾する項が無視されている点で不完全である。このような項はplasmons の共鳴吸収、発散を表わす項で、Schwartzの意味の分布関数を考えることによつて、適当に評価する事ができる。その結果は$|\gamma_q| \ll \omega_q$の場合にはそのplasmons の寄与はPines–Schrieffer 方程式と同型になる事がPart III で示される。この方法は$\tau_2 \ll \tau_3$ では比較的簡単に輸送方程式を与える点ですぐれているが、半面$\tau_2 \sim \tau_3$ の場合に拡張する事が容易で点で、次にのべるBalescu の理論に劣つている。

(c) Balescu の理論。 Rutherford–Frieman と同じbare particles を扱うが、Γ空間のLionville 方程式から出発し、Prigogine の diagram の方法[11]を使つて、ring 近似（安定系ではrandom phase 近似と対等）でまずΓ空間の方程式を導く。この方法の特徴は$\tau_2 \sim \tau_1$ の場合にも使えるような一般的な形に方程式を求める事ができる点にある。しかし、formulation はまわりくどく複雑で、途中物理的描像の不明確な点があるのが欠点である。特にBalescu は$|\gamma_q| \ll \omega_q$ ではMarkoff 近似が使えるとしているが、これは§5の議論からも明らかなように正しくない。特に初期時刻に於ける粒子間相関を完全に無視してしまつている。又、Schwar–

tz の意味での分布関数を考えるに当つて、振動しながら成長する項の取り扱いを誤つている。これらの点を補正してやると $\tau_2 \ll \tau_3$ では Rutherford Frieman の方法と完全に同じ結果を与える事が示される。これらの点、特に Non-Markoffian effect の取り扱いについて、Part Ⅳ で論ずる。

さて Part Ⅴ では残されたいくつかの問題を論ずる予定であるが、その中、特に Pines-Schrieffer 方程式の基礎づけが重要であると思われる。ここでは、bare particles と dressed particles とが同型の方程式に従がうかどうかという、極めて原理的な問題が登場する。

最後に、えられた輸送方程式に基づく安定化のメカニズムについてのべよう。定性的には、輸送方程式は次の三つの項からなつている。

a) 拡散項（準線型理論で、電場のエネルギーを、peasmonsのエネルギーでおきかえたもの。）

b) 摩擦項（plasmons の自然放出による項）

c) Balescu-Lenard の衝突項から、plasmons の寄与を除いたもの。

以上の三つの項がいずれも安定化に働く事は明らかであるが、どの項が最も強く又は早くきくかはまだ明らかになつていない。

§7 〔これからの問題〕

我々の主眼は、長距離力で多数の粒子がお互いに correlate しているプラズマに於て、不安定性が生じた場合の輸送現象に、物性基礎論的見地からの考察を加えるという点にある。この立場に立つて以上概観し、以下 Part Ⅱ ～ Ⅴ で詳しく検討する問題を眺めてみると、問題は漸く手がつけられ始めたところだと云える。今後なされるべき問題は、大きく分けて二つ、一つは、現在えられた輸送方程式をより複雑で現実的な場合に拡張する事で

あり、その二は輸送方程式の応用であろう。

(a) 輸送方程式の拡張

Pines−Schrieffer, Rutherford−Frieman, Balescu の導いたのはいずれも均一な電子プラズマに対する方程式である。同様の方法で、(i)電子イオンプラズマ、(ii)不均一な場合、(iii)磁場中プラズマ等を扱う事が、現実のプラズマの問題として必要である。(i)はPines−Schrieffer によつて(もともとPines−Schriefferは不安定性を考察しているわけではないが)調べられているが、(ii),(iii)は安定プラズマの場合でも非常に数学的に複雑であり、将来の問題であろう。なお、輸送方程式自体の問題としては、(iv) Rutherford−Frieman のB−B−G−K−Y方式を、$\tau_2 \sim \tau_3$ の場合にも使えるようにやり直す事が残されている。

(b) 輸送方程式の応用

輸送方程式の応用としては、第一に輸送方程式の解の性質を調べる事で、これによつて、(i)実際に分布関数、又それを通して成長率がどのように変化するか、(ii) §5でふれたように、準線形近似の場合同様、対相関関数の定常分布が現われるか、その様相はどういうものか、という解析を行つて、系の時間的発度を調べる事である。言葉を変えて云えば、準線形近似の場合に定性的に示された成長抑制のメカニズムを、均一系の場合について調べる事である。第二は、輸送方程式の具体的応用で、(iii)輸送係数、たとえばfrequency dependent conductivity を計算して、安定プラズマの場合との差異を調べ、併せて、プラズマの基礎実験に対して、問題提起を行う事であろう。

Part II　Pines と Schrieffer の Kinetic Equation

（3月23日受理）　（松 平 升）

§1 ——簡単な招介——

Pines と Schrieffer[8]（以下P－Sと略す）は金属の電気伝導の理論とアナロガスに、プラズマを電子とプラズモンの体系とみなして、量子力学的に分布関数に対するKinetic Equationを見出した。Bohm-Pines の出発点のハミルトニアンは

$$H = H_e + H_{pl} + H_{int} + \Delta H_{pl} + H_{sr} + U \tag{1}$$

$$H_e = \Sigma E_p c_p^+ c_p \quad , \quad H_{pl} = \Sigma \hbar w_q A_q^+ A_q \quad , \quad E_p = (\hbar p)^2 / 2m$$

$$H_{int} = \Sigma M(p,q)\,(A_q^+ - A_{-q})\, c_p^+ c_{p+q} \quad ,$$

$$M(p,q) = (2\pi e^2 / q^2 V \hbar w_q)^{1/2} (E_{p+q} - E_p)$$

$$\Delta H_{pl} = \hbar \Sigma L_q (A_q^+ - A_{-q})(A_q - A_{-q}^+) \ , \ L_q = (w_p^2 - w_q^2)/4w_q$$

である。Bohm-Pines にしたがつて H_{int} のヴアーチャルな部分を消すカノニカル変換を行い $H_{s.r}$ の項Uを無視すると、

$$H = H_e + H_{pl} + \tilde{H}_{int} \tag{2}$$

となる。$\tilde{H}_{int}$ は H_{int}のリアル・プロセスの部分で、エネルギー保存によって

$$\tilde{H}_{int} = \Sigma M_q (A_q^+ - A_{-q})\, c_p^+ c_{p+q}$$

$$M_q = (2\pi e^2 \hbar w_q / q^2 V)^{1/2}$$

と書いてよい。電子とプラズモンの衝突による遷移確率は $2\pi |M_q|^2/\hbar$ で与えられているから、電子およびプラズモンの分布関数 F_p, N_q の時間変化は

$$\partial F_p/\partial t = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_q |M_q|^2 \times$$

$$\times \{\delta(w_q - w_p^q)(1+N_q) F_{p+q}(1-F_p)$$

$$+\delta(w_p + w_p^{-q}) N_q F_{p-q}(1-F_p)$$

$$-\delta(w_q - w_p^q) N_q F_p(1-F_{p+q})$$

$$-\delta(w_q + w_p^{-q})(1+N_q) F_p(1-F_{p+q})\} \tag{3}$$

$$\partial N_q/\partial t = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_p |M_q|^2 \quad \delta(w_q - w_p^q) \quad \times$$

$$\times \{(1+N_q) F_{p+q}(1-F_p) - N_q F_p(1-F_{p+q})\} \tag{4}$$

と書かれる。ただし $\hbar w_p^q = E_{p+q} - E_p$. 高温プラズマの他の理論と比較するために classical limit $\hbar \to 0$ を行うと

$$F_p \doteqdot (2\pi\hbar/m)^3 \, c\, f(v) , \tag{5}$$

$$v = (\hbar/m)\, p , \qquad c = \text{数密度}$$

とおいて

$$\partial f(v)/\partial t = \sum_q \frac{4\pi^2 e^2}{mq^2} \{ \frac{\hbar w_q}{m} N_q\, q\cdot\nabla \times$$

$$\times \left[\delta(w_q - q\cdot v)\, q\cdot\nabla f(v)\right] +$$

$$+ w_q\, q\cdot\nabla\left[\delta(w_q - q\cdot v) f(v)\right]\} \tag{6}$$

$$\partial N_q / \partial t = 2 r_q N_q + \int dv \frac{4\pi^2 e^2}{\hbar q^2} w_q f(v)\ \delta(w_q - q \cdot v) \quad (7)$$

$$r_q = \frac{2\pi^2 e^2}{mq^2} w_q \int dv\ q \cdot \nabla f(v)\ \delta(w_q - q \cdot v) \quad (8)$$

となる。(6)〜(8)がP－SのKinetic equationであり、(6)は以前にKlimontovitch[13]が導びいたものと一致している。

§2 ——— コメント ———

Part Iで述べたようにP－Sの方法は多くの利点をもつている点大変魅力的である。また、WyldとPines[14]が示したように、安定プラズマ（$r_q < 0$）の場合に(7)の左辺を0においてN_qを$f(v)$であらわして(6)に代入するとBalescu-Lenardの式のプラズマの極の寄与に一致する（これは決してトリヴイアルではない！）。さらに、電場のエネルギーが$\mathcal{E}(q) = \hbar w_q N_q$と書けることに注意すると、(6)〜(8)はPart Iの(4)〜(7)の準線形理論のKinetic equationに、電子によるプラズモンの自発放出の項がつけ加わつたものになつていることがわかる。*) このことは、P－Sの式が不安定系に対しても使えるであろうこと、そして電場のマクロな不均一性の成長と、均一系におけるミクロなゆらぎの成長とが同じ方程式で記述されることを示している。

---

*)〔脚註〕電子によるプラズマ振動の励起は不安定成長のinitial stageにおいて重要な役割を演ずる。Ichimaru[9]はP－Sの式にもとずいてcritical pointの近くでの成長をしらべてD－Pの計算との比較を行つている。

P－Sの式はこのようにいろいろのメリツトを持つているが、他方、その導出が直観的であるだけに、特に不安定なプラズマに対して、適用限界がどの範囲であるか、何が本質的な近似になつているのか、等について不明確であり、もつとしつかりした基礎に立つてその式の性格をみきわめる事が有益であると思われる。

§3 ――― P－Sの式の導出 ―――

P－Sの式がどのような近似の下に導かれるか、また他の理論との関係はどうなのか。といつた問題を調べるために、我々は(1)にもどつて分布関数の時間変化を調べてみよう。まず(1)のハミルトニアンについて次の点に注意する必要がある。H_{pl} は w_q で振動する振動子の集りであるが、プラズマ振動のの振動数 w_q と減衰（成長）率 r_q とは

$$\varepsilon_q(w_q + r_q) = 0 \tag{9}$$

できまる。系の透電率 $\varepsilon_q(w)$ は電子の分布関数 $F_p(t)$ の汎関数である。もともと不安定プラズマが時間→∞で平衡に近づくのは kinetic equation にしたがつて $F_q(t)$ が変化して、そのために、$r_q > 0 \longrightarrow r_q < 0$ と変化するためであることを考えると、w_q が self-consistent に(9)できまるということは w_q が時間とともに変ることを物語る。したがつてハミルトニアンを(1)のかたちに書くとき、(1)の各項は時間をインプリシツトに含む。以下の計算ではこの時間依存性を無視する。これが第一の近似であつて、$F_p(t)$ の時間変化が我々の問題にしているタイム・スケールではきわめてゆつくりであることを予想しての話であつて、ここからP－Sの式の適用出来るタイム・スケールがきまると思われる。この点をもつと掘り下げるには、(1)を書きなお

して時間によらない、ハミルトニアンで話をすすめればよいのであるが、それはPart V にまわすことにしよう。

P－Sと同様、(1)の H_{sr} とUは無視する。Bohm-Pines の理論では、ハミルトニアンの他に副条件

$$\Omega_q \Phi = 0$$

$$\Omega_q = A_q^+ + A_{-q} - 2(2\pi e^2/q^2 V\hbar w_q)^{1/2} \sum_p c_{p+q}^+ c_p \tag{10}$$

によつて空間が制限されている。電子の分布函数を

$$F_p(t) = \mathrm{Tr}\left[R(t)\, c_p^+ c_p\right] = \mathrm{Tr}\left[R(0)\, c_p^+(t)\, c_p(t)\right] \equiv \langle c_p^+ c_p \rangle \tag{11}$$

で定義しよう。ここにR(t)はハミルトニアン(1)で運動する密度行列であるが、副条件はR(t)の初期値R(0)に含まれていると考えればよい。具体的に書くと

$$\langle m \,|\, R(0) \,|\, n \rangle \neq 0 \quad , \quad \text{only when}$$

$$\Omega_q \Phi_m = \Omega_q \Phi_n = 0$$

結局われわれはハイゼンベルグ演算子 $c_p(t)$ 等の時間変化を追えばよい。これは勿論副条件が時間に依らないこと $[\Omega_q , H] = 0$ による。したがつて kinetic equation に関する限り、Bohm-Pines の副条件(10)は問題にしないで良いと云えよう。同様に

$$N_q(t) = \langle A_q^+ A_q \rangle , \quad G_{p,q}(t) = \langle A_q c_{p+q}^+ c_p \rangle ,$$

$$G_{p,q}^+(t) = \langle A_q^+ c_p^+ c_{p+q} \rangle \tag{12}$$

を定義する。

$$i\hbar\partial c_p/\partial t = E_p c_p + \sum_q M(p,q)(A_q^+ - A_{-q})\, c_{p+q}$$

$$i\hbar\partial c_p/\partial t = \hbar w_q A_q + \sum_p M(p,q)\, c_p^+ c_{p+q} + 2\hbar L_q (A_q - A_{-q}^+) \tag{13}$$

によつて次の方程式のセツトを得る。

$$i\hbar\partial F_p(t)/\partial t = \sum_q M(p,q)\,\{G_{p,q}^+(t) - G_{p+q,-q}(t) - G_{p,q}(t) + G_{p+q,-q}^+(t)\} \tag{14}$$

$$i\hbar\partial N_q(t)/\partial t = \sum_p M(p,q)\,\{G_{p,q}^+(t) - G_{p,q}(t)\} + 2\hbar L_q\{\langle A_q A_{-q}\rangle - \langle A_q^+ A_{-q}^+\rangle\} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\hbar(i\partial/\partial t + w_p^q - w_q)\, G_{p,q}(t) &= \\ &= \sum_{q'} M(p,q')\langle A_q (A_{q'}^+ - A_{-q'})\, c_{p+q}^+ c_{p+q'}\rangle \\ &- \sum_{q'} M(p+q,-q')\langle A_q (A_{-q'} - A_{q'}^+)\, c_{p+q-q'}^+ c_p\rangle \\ &+ \sum_{p'} M(p',q)\langle c_{p'}^+ c_{p'+q}\, c_{p+q}^+ c_p\rangle \\ &+ 2\hbar L_q\{G_{p,q}(t) - G_{p+q,-q}^+(t)\}\end{aligned} \tag{16}$$

以下同様にして次々に高次の関数の式が得られるが、ここで$L_q \propto M^2(p,q)$によつてL_q の項を落とし、さらに(16)の右辺にハートレ的な factorization を行う

$$\begin{aligned}\hbar(i\partial/\partial t + w_p^q - w_q)\, G_{p,q}(t) &= \\ &= M(p,q)\{(1+N_q(t))(F_{p+q}(t) - F_p(t)) + F_p(t)(1 - F_{p+q}(t))\}\end{aligned} \tag{17}$$

同様に

$$\hbar(i\partial/\partial t - w_p^q + w_q)\, G^{+}_{p,q}(t) =$$

$$= M(p,q)\{N_q(t)(F_p(t) - F_{p+q}(t)) - F_{p+q}(t)(1-F_p(t))\} \qquad (17')$$

(5)と同様に $$G_{p,q}(t) = (2\pi\hbar/m)^3\, c\, g(v,q;t) \qquad (5')$$

などとおいて classical limit をとると

$$i\partial f(v)/\partial t = \frac{1}{m}\sum_q M(v,q)\; q\cdot\nabla[g^{+}(v,q) - g(v,q)] \qquad (18)$$

$$i\hbar\partial N_q/\partial t = cV\int dv\, M(v,q)[g^{+}(v,q) - g(v,q)] \qquad (19)$$

$$(i\partial/\partial t + q\cdot v - w_q)\, g(v,q) =$$

$$= \frac{M(v,q)}{\hbar}\{N_q\frac{\hbar}{m}q\cdot\nabla f(v) + f(v)\} \equiv \Phi(t) \qquad (20)$$

$$M(v,q) = (2\pi e^2\hbar/q^2 V)^{1/2}\; q\cdot v \qquad (21)$$

$$g^{+}(v,q) = g(v,q)^{*} = g'(v,q) - ig''(v,q) \qquad (22)$$

となる。(18)〜(20)を次のようにとく。(18)，(19)の右辺には

$\mathrm{Im}\, g(v,q) = g''(v,q)$ のみがあらわれることに着目して、(20)を g' と g''

との式に分け、各々にラプラス変換

$$\tilde{g}(s) = \int_0^{\infty} dt\, e^{-st} g(t)$$

を行うと

$$s\tilde{g}'(s) = g'(0) + (w_q - q\cdot v)\,\tilde{g}''(s)$$

$$s\tilde{g}''(s) = g''(0) - (w_q - q\cdot v)\,\tilde{g}'(s) - \tilde{\Phi}(s) \qquad (23)$$

となる、(23)で $\tilde{g}'(s)$ を消去して $\tilde{g}''(s)$ を求め、逆変換によつて

$$g''(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_c ds\, e^{st}\left[\frac{1}{s-i(w_q-q\cdot v)}+\frac{1}{s+i(w_q-q\cdot v)}\right]$$

$$\times\ \left\{ g''(0)+\frac{q\cdot v-w_q}{s}\, g'(0)-\int_0^\infty dt'\ e^{-st'}\varPhi(t')\right\} \qquad (24)$$

を得る。(24)の $\{\cdots\cdots\}$ 中の第一項、第二項はそれぞれ $\sin(w_q-q\cdot v)\,t$, $\cos(w_q-q\cdot v)\,t$ と振動するので省略し、積分の順序を入れかえると

$$g''(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_0^t dt''\int_c ds\, e^{st''}\left[\frac{1}{s-i(w_q-q\cdot v)}+\frac{1}{s+i(w_q-q\cdot v)}\right]$$

$$\times\ \varPhi(t-t'') \qquad (25)$$

ここでマルコフ流の仮定、即ち $\varPhi(t-t'')$ は t'' によらない――記憶は十分すみやかに失われる――として $\varPhi(t-t'')\longrightarrow\varPhi(t)$ とおく。これは(24)にもどれば $\varPhi(t')\longrightarrow\varPhi(t)$ とおいたことになつていて、$\varPhi(t)$ の時間変化が十分にゆるやかであるとしたことになつている。我々はもともと一体分布関数 $f(v)$ の時間変化を無視してきたので、この仮定はその意味で consistent であるが、我々は更に $N_q(t)$ の時間変化も $g(v,q;t)$ の変化に対して十分におそいと仮定したことになる。この仮定は Balescu や Rutherford-Frieman にエクスプリシツトには含まれていない。A_q , A_q^+ が系の集団運動を記述する良い座標であることを積極的に理論に導入するのが Bohm-Pines の立場である。

この仮定の下で (24) は直ちに積分されて

$$g''(t)=-\varPhi(t)\frac{\sin(w_q-q\cdot v)\,t}{w_q-q\cdot v}$$

$t\gg w_p^{-1}$ に対して上式の右辺は δ- 関数で近似されて結局

$$g''(v,q;t) = -\frac{M(v,q)}{\hbar}\left[\frac{\hbar}{m} N_q(t)\, q\cdot\nabla f(v,t) + f(v,t)\right]\times$$
$$\times\ \pi\delta(w_q - q\cdot v) \tag{26}$$

と求まる。(26)を(18)と(19)の右辺に代入したものはまさにP－Sの式(6)～(8)にほかならない。

§4 ――― 問題提起 ―――

このようにして、P－Sの式はハミルトニアン(1)から、(i) Hartree-factorization と(ii)マルコフ的近似、の下に導かれることがわかつた。§3で用いたequation of motion method は2時間グリーン関数、或はEhrenrich-Cohen の1体密度行列の方法と同じ精神であつて、その有用性は広く認められている。前節の方法を不均一プラズマ、電子－イオンプラズマ、或は磁場中プラズマの問題に拡張することは困難ではないであろう。

さて、P－Sの式の導入だけならば前節の　　　やるのが多分一番簡単であろうが、その際に用いられた近似の正当性についてはもつとくわしく調べる必要がある。一方、(18)式を眺めると、これはRutherford-Frieman あるいわBalescu の対応する式と形式上よく似ていて、右辺の$g(v,q;t)$は後者の対相関々数に相当する。そこで、$g(v,q;t)$の満足する方程式を見出すことが出来れば我々はP－Sの式とBlescu, Rutherford-Frieman の式との関係を知り、同時にP－Sの式の正当性についても理解が得られるであろう。この詳しい分析を我々はPart Vで行う予定であるが、ここでもう一度問題点を列挙してそのような分析を必要とする理由を掲げておこう。

(i)　P－Sの式では一体分布関数$f(v,t)$の他にプラズモンの分布関数$N_q(t)$

もよい集団座標として、その時間変化を g(v,q;t)の変化に対して無視した。このことは結果的にBalescu, Rutherford-Frieman との差異をもたらすであろうか？

(ii) Balescu, Rutherford-Friemanではクーロン相互作用をしている裸の電子の分布関数 $\langle a_p^+ a_p \rangle$ の時間変化をみているのに対して、P－Sでは準粒子 $\langle c_p^+ c_p \rangle$ の変化を追いかける。安定プラズマに対して、両者は同じLenard-Balescu の式を与えるが、不安定の場合、この点はどうであろうか？

(iii) §3では副条件(10)は密度行列の初期値R(0)に含ませてしまつて、事実上無視されている。前にも述べたように、運動方程式を論ずる限り副条件は有限温度でもきかないと予想されるが、実際は、Part Vで示すように副条件を無視して話を進める場合と、副条件を積極的に利用する場合とで幾分方程式の形が違つてくる。最終的に同じ結果を与えるものであるかどうか、検討する事は有用であろう。

文　　献

1) L. Landan, J. Phys. (U S S R) 10 (1946) 25

2) J.D. Jackson, J. Nucll.Energy C1 (1960) 171

O. Penrose, Phys. Fluids 3 (1960) 258

3) S. Ichimaru, Phys. Fluids 5 (1962) 1264

4) W.E. Drummond and D. Pines, Proc. Conf.Plasma Phys. and Controlled Nuclear Fusion Resch. (Salzburg,1961)

松平 升

P Papar # 134

A.A. Vedenov, E. P. Velikov and R. Z. Sagdeev, ibid. papar # 199

5) W.E. Drummond and M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids 5 (1962) 1570

6) R. Balescu, Phys. Fluids 3 (1960) 52

7) A. Lenard, Ann. Phys. 3 (1960) 390

8) D. Pines and J.R. Scrieffer. Phys. Rev. 125 (1962) 804

9) S. Ichimaru, Sci. Rep.No2, Contract AF 19-7473 (1962)

10) P. H. Rutherford and E, A. Frieman,Phys. Fluids 6 (1963) 1139

11) R. Balescu, J. Math. Phys. 4 (1963) 1009

12) S. Ichimaru, Ann. Phys 20 (1962) 78

13) Y. Klimontovich, J E T P 36 (1959) 1405

14) H.W. Wyld and D. Pines, Phys. Rev. 127 (1962) 1851

15) H. Ehrenreich and M.H. Cohen, Phys. Rev. 115 (1959) 786